



TM6110

Advanced Reservoir Simulation

PR 1

Deadline : 9 September 2026



Program Studi Teknik Perminyakan
Faculty of Mining and Petroleum Engineering
Bandung Institute of Technology
2026



PR Nomor 1

Kunci Jawaban - Review dua paper sesuai format: Judul, Author, Publikasi, Background, Objective, Method, Result, Conclusion, serta Strength and Weakness.

Paper 1 - A Variable Rate Solution to the Nonlinear Diffusivity Gas Equation (SPE 145468)

Judul: A Variable Rate Solution to the Nonlinear Diffusivity Gas Equation (SPE 145468)

Author: Abelardo B. Barreto Jr. (Petrobras); Alvaro M. M. Peres (Petrobras); Adolfo P. Pires (North Fluminense State University / UENF)

Publikasi: SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, USA, 30 Oktober-2 November 2011.

Background

Persamaan difusivitas gas bersifat nonlinear karena viskositas, kompresibilitas gas, dan faktor deviasi gas Z semuanya berubah terhadap tekanan. Transformasi pseudo pressure dari Al-Hussainy, Ramey, dan Crawford (1966) sudah menjadi praktik standar untuk melinearkan persamaan ini, tetapi transformasi tersebut tidak sepenuhnya menghilangkan nonlinearitas karena kelompok difusivitas masih bergantung pada pseudo pressure itu sendiri. Untuk fluida sedikit termampatkan (liquid), efek laju alir yang berubah-ubah dapat ditangani lewat prinsip superposisi waktu (prinsip Duhamel). Namun superposisi ini tidak bisa begitu saja diterapkan pada reservoir gas karena sifat persamaannya yang nonlinear, dan literatur sebelumnya (Kale and Mattar 1980; Peres, Serra and Reynolds 1990; von Schroeter and Gringarten 2007) selalu menyederhanakan masalah dengan mengasumsikan difusivitas konstan.

Objective

Mengembangkan solusi umum dan lebih fundamental untuk persamaan difusivitas gas nonlinear yang secara eksplisit memperhitungkan perubahan sifat fluida terhadap tekanan sekaligus mampu menangani laju produksi gas yang bervariasi terhadap waktu (variable rate), untuk berbagai geometri sumur dan reservoir, kemudian menurunkan dan memvalidasi ekspresi analitiknya untuk kasus sumur vertikal yang menembus penuh reservoir gas homogen tak terhingga.

Method

- Menyusun solusi umum persamaan difusivitas gas dengan metode Green's Function, memperlakukan perubahan hasil kali viskositas-kompresibilitas (w) sebagai suku sumber nonlinear dalam persamaan integral-diferensial tipe Volterra.
- Karena solusi bersifat implisit, digunakan skema iteratif; iterasi pertama (truncation orde pertama) menghasilkan solusi tertutup yang cukup akurat untuk keperluan rekayasa.
- Solusi umum diturunkan untuk sumur vertikal menembus penuh dalam koordinat silinder (sumber garis), menghasilkan solusi laju-variabel via prinsip Duhamel klasik ditambah suku koreksi nonlinear.
- Kasus khusus uji buildup (drawdown konstan lalu sumur ditutup) diturunkan secara eksplisit, dipisah menjadi kontribusi periode drawdown dan buildup.
- Integral multidimensi pada suku koreksi dihitung numerik memakai pustaka integrasi CUBA (algoritma Monte Carlo Vegas), lalu dibandingkan terhadap simulator finite difference (grid radial 200 sel) pada data sintesis, termasuk uji sensitivitas dua laju alir berbeda.



Result

- Untuk periode drawdown maupun buildup, pseudo pressure dan turunannya sangat sesuai dengan hasil simulator finite difference, khususnya untuk waktu tak berdimensi lebih besar dari 10.
- Suku koreksi orde pertama dari solusi analitik lebih halus dan konsisten dibanding hasil simulator finite difference.
- Pada waktu shut-in yang panjang, pseudo pressure gas berimpit dengan solusi fluida sedikit termampatkan, sehingga metode interpretasi klasik (Horner plot, log-log derivative) tetap dapat dipakai.
- Suku pseudo pressure orde pertama terbukti bergantung pada laju alir (rate dependent), baik pada periode drawdown maupun buildup.

Conclusion

Paper ini berhasil menurunkan solusi baru dan lebih umum untuk persamaan difusivitas gas nonlinear yang menangani laju alir sumur yang berubah-ubah, dengan pendekatan Green's Function yang tidak memerlukan asumsi difusivitas konstan seperti pada literatur sebelumnya. Validasi terhadap simulator finite difference menunjukkan kesesuaian yang sangat baik. Untuk waktu yang cukup panjang, perilaku pseudo pressure gas menyerupai solusi liquid sehingga teknik interpretasi klasik tetap berlaku, namun suku orde pertamanya bersifat rate-dependent.

Strength and Weakness

Kekuatan:

- Pendekatan matematis rigorous yang tidak memaksakan asumsi difusivitas konstan, sehingga lebih mendekati fisika sebenarnya dari aliran gas nonlinear.
- Validasi numerik terhadap simulator finite difference independen memperkuat kredibilitas hasil dan memberi wawasan praktis (rate dependence, konvergensi ke solusi liquid pada waktu panjang).
- Formulasi umum pada dasarnya dapat diperluas ke berbagai geometri sumur (horizontal, fraktur hidrolik, restricted entry).

Kelemahan:

- Solusi bersifat implisit dan memerlukan integrasi numerik multidimensi, sehingga bukan solusi tertutup sederhana seperti persamaan Horner klasik.
- Hanya suku orde pertama (first-order truncation) yang didemonstrasikan; akurasi orde lebih tinggi pada nonlinearitas ekstrem tidak dieksplorasi.
- Validasi terbatas pada satu dataset sintetis dan geometri sumur paling sederhana, belum diuji terhadap data lapangan riil.



Paper 2 - Diffusivity Equation for Real Liquids with Gas in Solution (SPE 23740)

Judul: Diffusivity Equation for Real Liquids with Gas in Solution (SPE 23740)

Author: E. Lanfranchi (S.A. Consultores C.S.C.)

Publikasi: Second Latin American Petroleum Engineering Conference (II LAPEC), SPE, Caracas, Venezuela, 8-11 Maret 1992.

Background

Analisis tekanan transien klasik untuk aliran fluida liquid umumnya mereduksi persamaan difusivitas dengan mengasumsikan fluida bersifat ideal dan sedikit termampatkan (slightly compressible), sehingga tekanan bisa dijadikan variabel bebas secara langsung. Asumsi ini bekerja baik untuk minyak dengan gas terlarut (R_s) rendah. Namun ketika sejumlah besar gas terlarut dalam minyak pada kondisi reservoir, penyimpangan dari perilaku ideal dan sedikit termampatkan bisa menjadi signifikan, dan literatur sebelumnya belum mengukur secara kuantitatif seberapa besar dampak kedua asumsi tersebut.

Objective

Mengembangkan pendekatan alternatif untuk persamaan difusivitas minyak yang tidak bergantung pada asumsi fluida ideal maupun sedikit termampatkan, serta mengukur dan membandingkan seberapa besar penyimpangan distribusi tekanan yang dihasilkan oleh kedua asumsi klasik tersebut, pada sistem satu dimensi, untuk berbagai tingkat gas terlarut.

Method

- Menurunkan persamaan densitas minyak langsung dari kurva PVT (B_o dan R_s terhadap tekanan), dengan hubungan linear pada rentang tekanan tertentu, bukan dari asumsi gas ideal/kompresibilitas konstan.
- Mensubstitusikan persamaan densitas ke persamaan kontinuitas dan Hukum Darcy untuk memperoleh persamaan difusivitas nonlinear baru dalam bentuk densitas, yang mereduksi menjadi persamaan aliran ideal klasik sebagai kasus khusus.
- Menyelesaikan kedua persamaan (non-ideal dan ideal) secara numerik dengan skema beda hingga Crank-Nicolson dan iterasi Gauss-Seidel pada sistem linear satu dimensi (panjang 5000 ft).
- Menyiapkan data PVT dari enam sampel crude oil dikelompokkan berdasarkan R_s : Grup A (rendah), B (sedang), C (tinggi), lalu menghitung profil tekanan untuk tiga skenario (non-ideal, ideal, sedikit termampatkan) dan mengukur beberapa metrik deviasi.

Result

- Asumsi fluida ideal menghasilkan deviasi tekanan lebih kecil dibanding jika ditambah asumsi sedikit termampatkan; pada waktu lanjut, deviasi kasus sedikit termampatkan bisa lebih dari dua kali lipat deviasi kasus ideal saja.
- Deviasi meningkat seiring bertambahnya R_s : pada $R_s = 750$ scf/STB deviasi maksimum sekitar 0.65% (ideal) dan 1.15% (sedikit termampatkan); pada $R_s = 3000$ scf/STB naik menjadi sekitar 2.20% dan 3.20%.
- Deviasi ternormalisasi terhadap waktu selalu melewati satu titik puncak, dan lokasi puncak ini bergeser ke waktu lebih lambat seiring meningkatnya gas terlarut.



- Deviasi terbesar berpotensi muncul tepat pada rentang waktu awal (early time) pengukuran uji sumur, terutama pada reservoir ketat dengan crude berkelarutan gas tinggi.

Conclusion

Untuk aliran satu dimensi di bawah tekanan bubble point, asumsi fluida ideal saja sudah menimbulkan deviasi distribusi tekanan yang terbatas namun tidak dapat diabaikan, dan deviasi ini membesar seiring meningkatnya R_s . Menambahkan asumsi fluida sedikit termampatkan memperbesar deviasi tersebut lebih jauh. Kedua asumsi penyederhanaan ini dapat berdampak signifikan terutama pada perhitungan kapasitas alir di waktu-waktu awal, sehingga pendekatan non-ideal yang diusulkan lebih relevan untuk minyak dengan kadar gas terlarut tinggi.

Strength and Weakness

Kekuatan:

- Pendekatan koreksinya sederhana secara konsep dan diturunkan langsung dari data PVT (B_o dan R_s vs P) yang rutin tersedia di lapangan.
- Memberikan kuantifikasi eksplisit dari besarnya error akibat dua asumsi penyederhanaan bertingkat, diuji pada rentang R_s yang realistis.
- Kesimpulannya relevan secara praktis: periode early-time yang paling sering dipakai untuk estimasi parameter reservoir justru paling terdampak oleh asumsi yang keliru.

Kelemahan:

- Studi terbatas pada aliran satu dimensi linear; belum mencakup geometri radial/2D/3D atau efek sumur (skin, wellbore storage).
- Hanya memodelkan aliran satu fase liquid di bawah tekanan bubble point, bukan aliran dua fase gas-minyak yang sesungguhnya.
- Deviasi hanya dibandingkan terhadap baseline idealisasi buatan penulis sendiri, bukan terhadap data tekanan lapangan/pengukuran aktual.



PR Nomor 2

Soal: Buktikan penurunan rumus di bawah ini dan berikan pembuktian untuk rumus tersebut.

$$\nabla^2 p_p = (\phi \mu c_t / k) \cdot \partial p_p / \partial t$$

(Rumus asal pada slide kuliah: nabla kuadrat p_p sama dengan $(\phi \mu c_t / k)$ dikali turunan parsial p_p terhadap t - lihat gambar referensi di bawah.)

Homework:

■ Proof:

$$\nabla^2 p_p = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p_p}{\partial t}$$

Diketahui dan Asumsi

- Reservoir homogen dan isotropik, sehingga permeabilitas k dianggap konstan terhadap posisi maupun tekanan.
- Fluida berupa minyak satu fase (di atas tekanan bubble point), dengan viskositas $\mu(p)$ dan faktor volume formasi $B_o(p)$ yang keduanya boleh berubah terhadap tekanan.
- Kompresibilitas minyak $c_o = -(1/B_o)(dB_o/dp)$, kompresibilitas batuan $c_f = (1/\phi)(d\phi/dp)$, kompresibilitas total $c_t = c_o + c_f$.
- Titik awal pembuktian adalah bentuk umum persamaan aliran minyak dengan faktor volume formasi: $\text{div}[k/(\mu B_o) \text{grad } p] = d/dt[\phi B_o]$.

Langkah Pembuktian

Langkah 1 - Definisikan variabel tekanan ternormalisasi p_p

Sama seperti trik pseudo-tekanan $m(p)$ pada gas nyata, didefinisikan variabel baru p_p lewat integral berikut, agar suku $k/(\mu B_o)$ yang nonlinear diserap ke dalam definisi variabel itu sendiri:

$$p_p(p) = \int_{p_b}^p \frac{dp'}{\mu(p') B_o(p')}$$

Konsekuensi langsung definisi ini (Teorema Dasar Kalkulus) adalah turunannya terhadap p :

$$dp_p/dp = 1 / (\mu(p) B_o(p))$$

Langkah 2 - Sederhanakan ruas kiri (suku aliran)

Dengan aturan rantai, gradien p_p berkaitan dengan gradien p melalui:

$$\nabla p_p = (dp_p/dp) \nabla p = (1/(\mu B_o)) \nabla p$$



Karena k konstan, ia bisa dikeluarkan dari operator divergensi (sifat linearitas), sehingga ruas kiri persamaan asal menjadi:

$$\nabla \cdot [k/(\mu B_o) \nabla p] = \nabla \cdot [k \nabla p_p] = k \cdot \nabla^2 p_p$$

Langkah 3 - Sederhanakan ruas kanan dengan aturan rantai

Ruas kanan diturunkan dulu terhadap p , baru dikalikan dp/dt (aturan rantai):

$$\partial/\partial t [\phi/B_o] = \{d/dp(\phi/B_o)\} \cdot (\partial p/\partial t)$$

Turunan $d/dp(\phi/B_o)$ diuraikan dengan aturan hasil kali (product rule):

$$d/dp(\phi/B_o) = (1/B_o)(d\phi/dp) + \phi \cdot (-1/B_o^2)(dB_o/dp) = (\phi/B_o)c_f + (\phi/B_o)c_o = (\phi/B_o)(c_o + c_f) = \phi c_t/B_o$$

Persis di sinilah definisi kompresibilitas total $c_t = c_o + c_f$ muncul secara alami dari penurunan, bukan diasumsikan begitu saja. Sehingga ruas kanan menjadi:

$$\partial/\partial t [\phi/B_o] = (\phi c_t/B_o) \cdot \partial p/\partial t$$

Langkah 4 - Ganti dp/dt dengan dp_p/dt

Dari hasil Langkah 1, berlaku juga hubungan sebaliknya (aturan rantai lagi, menurunkan p_p terhadap t):

$$\partial p_p/\partial t = (dp_p/dp)(\partial p/\partial t) = (1/(\mu B_o))\partial p/\partial t \Rightarrow \partial p/\partial t = \mu B_o \cdot \partial p_p/\partial t$$

Substitusikan ini ke hasil Langkah 3:

$$\partial/\partial t [\phi/B_o] = (\phi c_t/B_o) \times \mu B_o \cdot \partial p_p/\partial t = \phi \mu c_t \cdot \partial p_p/\partial t$$

Perhatikan bahwa suku B_o pada pembilang dan penyebut saling meniadakan - inilah alasan definisi p_p di Langkah 1 dipilih persis seperti itu.

Langkah 5 - Gabungkan kedua ruas

Menyamakan hasil Langkah 2 dan Langkah 4 (karena keduanya berasal dari ruas kiri dan ruas kanan persamaan yang sama):

$$k \cdot \nabla^2 p_p = \phi \mu c_t \cdot \partial p_p/\partial t$$

Membagi kedua ruas dengan k , terbukti:

$$\nabla^2 p_p = (\phi \mu c_t / k) \cdot \partial p_p/\partial t \quad (\text{Terbukti / Q.E.D.})$$

Kesimpulan

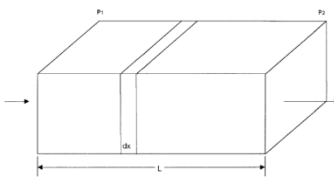
Dengan mendefinisikan tekanan ternormalisasi p_p sebagai integral $dp'/(\mu(p')B_o(p'))$ dari p_b sampai p , persamaan aliran minyak yang semula memuat suku $k/(\mu B_o)$ yang berubah-ubah terhadap tekanan dapat ditulis ulang menjadi bentuk persamaan difusivitas standar $\nabla^2 p_p = (\phi \mu c_t/k) \partial p_p/\partial t$, sama persis bentuknya dengan persamaan difusivitas cairan sederhana, hanya dengan p diganti p_p . Perlu digarisbawahi bahwa persamaan hasil akhir ini belum tentu benar-benar linear, karena koefisien $\phi \mu c_t/k$ di ruas kanan masih bisa berubah terhadap tekanan (lewat $\mu(p)$ dan $c_t(p)$); trik ini hanya membuat bentuk persamaannya kembali menyerupai persamaan difusivitas standar, sehingga metode dan solusi analitik yang sudah ada (1D, 2D, radial) bisa dipakai kembali sebagai pendekatan.



PR Nomor 3

Soal: Pahami arti rumus fisik berikut dan jelaskan bagaimana penurunannya hingga mendapat rumus $q = kA(p_1 - p_2)/(\mu L)$.

Linear Flow of Incompressible Fluids (Horizontal flow)



$$\frac{q}{A} \int_0^L dx = -\frac{k}{\mu} \int_{p_1}^{p_2} dp$$

$$q = \frac{kA(p_1 - p_2)}{\mu L}$$

$$q = \frac{0.001127 kA(p_1 - p_2)}{\mu L}$$

q = flow rate, bbl/day
 k = absolute permeability, md
 p = pressure, psia
 μ = viscosity, cp
 L = distance, ft
 A = cross-sectional area, ft²

Arti Fisik Rumus

Rumus $q = kA(p_1 - p_2)/(\mu L)$ adalah bentuk terintegrasi Hukum Darcy untuk kasus aliran linear satu dimensi, horizontal, tunak (steady-state), fluida incompressible, pada media berpori homogen. Setiap variabel memiliki arti fisik sebagai berikut:

- q = laju alir volumetrik fluida (bbl/hari) - banyaknya fluida yang melewati suatu penampang per satuan waktu, konstan di sepanjang lintasan karena fluida tidak termampatkan dan alirannya tunak (tidak ada akumulasi massa).
 - k = permeabilitas absolut media berpori (md) - ukuran kemampuan batuan meloloskan fluida, ditentukan oleh geometri pori, tidak bergantung pada jenis fluida.
 - A = luas penampang tegak lurus arah aliran (ft²), diasumsikan seragam sepanjang lintasan (bentuk balok/silinder linear).
 - p_1, p_2 = tekanan di titik hulu ($x=0$) dan titik hilir ($x=L$); beda tekanan ($p_1 - p_2$) adalah gaya dorong (driving force) yang menggerakkan fluida.
 - μ = viskositas fluida (cp) - ukuran hambatan internal fluida terhadap aliran; makin kental fluida, makin besar μ , makin kecil laju alir untuk beda tekanan yang sama.
 - L = panjang lintasan aliran (ft), jarak yang harus ditempuh fluida dari titik hulu ke titik hilir.
- Secara fisis, rumus ini menyatakan bahwa laju alir berbanding lurus dengan kemudahan media (k), luas penampang (A), dan beda tekanan pendorong ($p_1 - p_2$), serta berbanding terbalik dengan hambatan fluida (μ) dan jarak tempuh (L) - semakin jauh jaraknya atau semakin kental fluidanya, semakin kecil laju alir untuk beda tekanan yang sama.



Langkah Penurunan

Langkah 1 - Mulai dari Hukum Darcy bentuk diferensial

Kecepatan superfisial (laju alir per satuan luas) sebanding dengan gradien tekanan dan berbanding terbalik dengan viskositas:

$$v = q/A = -(k/\mu)(dp/dx)$$

Tanda negatif menunjukkan fluida mengalir dari tekanan tinggi ke tekanan rendah, yaitu berlawanan arah dengan gradien tekanan yang naik.

Langkah 2 - Terapkan asumsi tunak, incompressible, dan homogen

Karena aliran tunak (steady-state) dan fluida tidak termampatkan (incompressible), laju alir volumetrik q tidak berubah di sepanjang x (tidak ada sumber, bocoran, atau akumulasi massa). Luas penampang A konstan (bentuk seragam), dan permeabilitas k serta viskositas μ juga konstan (media homogen, kondisi isothermal). Sehingga q , A , k , dan μ semuanya bisa diperlakukan sebagai konstanta terhadap x pada Langkah 1.

Langkah 3 - Pisahkan variabel (separation of variables)

Kalikan silang persamaan Langkah 1 sehingga x dan p berada di ruas yang terpisah:

$$(q/A)dx = -(k/\mu)dp$$

Langkah 4 - Integralkan kedua ruas

Integralkan dari $x=0$ (di mana $p=p_1$) hingga $x=L$ (di mana $p=p_2$). Karena q , A , k , dan μ konstan, semuanya bisa dikeluarkan dari tanda integral:

$$(q/A) \int_0^L dx = -(k/\mu) \int_{p_1}^{p_2} dp$$

Langkah 5 - Selesaikan kedua integral

Integral ruas kiri menghasilkan panjang lintasan L , dan integral ruas kanan menghasilkan selisih tekanan (p_2-p_1):

$$(q/A) \cdot L = -(k/\mu)(p_2-p_1) = (k/\mu)(p_1-p_2)$$

Langkah 6 - Selesaikan untuk q

Kalikan kedua ruas dengan A dan bagi dengan L , diperoleh bentuk akhir yang dicari:

$$q = kA(p_1-p_2) / \mu L \quad (\text{Terbukti})$$

Langkah 7 - Konversi ke satuan lapangan (opsional)

Bentuk di atas berlaku dalam sistem satuan Darcy (cgs): k dalam darcy, A dalam cm^2 , p dalam atm, μ dalam cp, L dalam cm, dan q dalam cm^3/s . Jika dikonversi ke satuan lapangan yang lazim dipakai insinyur perminyakan - k dalam md, A dalam ft^2 , p dalam psia, μ tetap cp, L dalam ft, dan q dalam bbl/hari - faktor konversi satuan menghasilkan konstanta 1.127×10^{-3} , sehingga persamaannya menjadi:

$$q (\text{bbl/hari}) = 0.001127 \cdot kA(p_1-p_2) / \mu L$$

Konstanta 0.001127 ini murni berasal dari konversi satuan (md ke darcy, ft^2 ke cm^2 , psi ke atm, ft ke cm, cm^3/s ke bbl/hari) - bukan hasil turunan fisika baru, melainkan penyesuaian praktis supaya insinyur bisa memasukkan angka lapangan (md, ft, psia, cp, bbl/hari) langsung tanpa harus mengonversi manual ke satuan cgs terlebih dahulu.

Kesimpulan

Rumus $q = kA(p_1-p_2)/(\mu L)$ diperoleh dengan mengintegrasikan langsung Hukum Darcy diferensial untuk kasus aliran linear, tunak, satu fase, incompressible, dan media homogen. Penurunannya mengubah hubungan lokal (berlaku di setiap titik x) antara kecepatan aliran dan gradien tekanan menjadi hubungan global (berlaku untuk seluruh sistem) antara laju alir total dan beda tekanan total antara titik hulu dan hilir. Rumus ini hanya berlaku selama seluruh



asumsi yang mendasarinya - aliran tunak, fluida tidak termampatkan, media homogen, dan geometri linear horizontal - benar-benar terpenuhi; jika salah satu asumsi dilanggar (misalnya aliran radial menuju sumur, atau fluida termampatkan seperti gas), bentuk integrasinya akan berbeda.